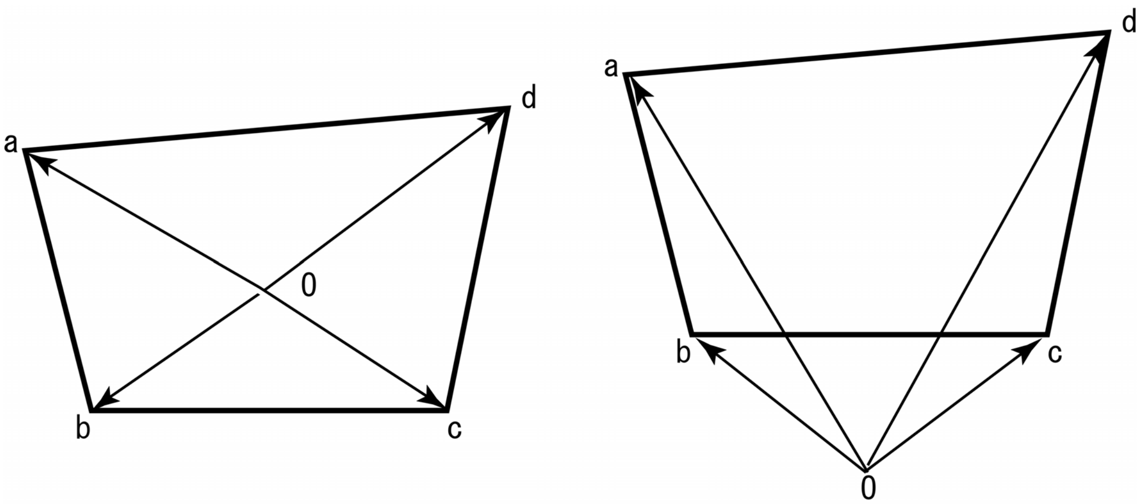
Appendix.A 多面体からなる剛体の質量と重心と慣性テンソル

シミュレータで扱う物体は質量や慣性テンソルが明らかな直方体や球ばかりではない．ここでは多面体の集合で表される密度一定な物体の質量と重心と慣性テンソルを導く．

A.1.体積



２次元の多角形の面積は３角形に分割して求めることが出来る．各頂点が反時計回りに配置してある場合ある１点と隣り合う頂点２つの３角形の面積の合計が面積である．例えば図の Oab の面積は,

$$S_1 = \frac{(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_z}{2} \tag{A.1.1}$$

である．多角形の面積 S は

$$S = \sum_i S_i \tag{A.1.2}$$

ある１点がもし多角形の外としても多角形外の部分は相殺されるため S は変わることはないし[1]，同様に凹形でも正しく S は求まる．

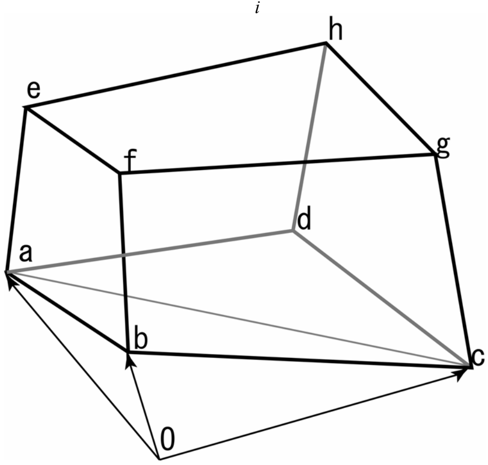
３次元空間の物体は３角錐の集合と考え同じ方法を適用する．図の **a**,**b**,**c** ベクトルによる３角錐の体積は,

$$V_1 = \frac{1}{6}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} \tag{A.1.3}$$

[1] 右図の場合 Obc が時計回りになっていることに注目．

であり３角形と同様に時計回りの場合は値が負になる．なおこの式は４次元ベクトルの外積の 1/6 と等しい[2]．３角形の面の数だけ合計したものが最終的な体積となる．

$$V = \sum_i V_i \tag{A.1.4}$$



A.2. 質量と質量重心

質量 m は体積 V に単位体積辺りの質量σを乗ずればよい．

$$m = V\sigma$$

質量重心は個々の３角錐の質量と重心から求めることが出来る．重心 **R** は

$$\iiint_V \left[\mathbf{R} - \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}^T\right] \sigma(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = 0$$

なので，密度一定のベクトル **a,b,c** による３角錐の重心は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

の変数変換を行い，

$$\int_0^1 \int_0^{1-\gamma} \int_0^{1-\beta-\gamma} \left[\mathbf{R} - \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}^T\right] \begin{vmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} \end{vmatrix}^{-1} \, d\alpha \ d\beta \ d\gamma = 0$$

を **R** について解いた

$$\mathbf{R} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}}{4}$$

である．i 個目の三角錐の質量と重心を $m_i, \mathbf{R}_i$ とするなら物体トータルの重心は

---

[2] 正確には４次元ベクトルの４つ目の値．$\begin{vmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} \end{vmatrix}/6$ である．

$$\mathbf{R} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{R}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{R}_i}{m}$$

となる.

A.3. 慣性テンソル

慣性テンソルも重心と同じように個々の３角錐の慣性テンソルを計算し合計すればよいので，まず密度一定のベクトル **a,b,c** による３角錐について考える.

(..)と A.2 の変数変換を利用して

$$\mathbf{I} = \int_0^1 \int_0^{1-\gamma} \int_0^{1-\beta-\gamma} \begin{pmatrix} y^2+z^2 & -xy & -xz \\ -yx & x^2+z^2 & -yz \\ -zx & -zy & x^2+y^2 \end{pmatrix} \left| \mathbf{a} \quad \mathbf{b} \quad \mathbf{c} \right| \sigma\, d\alpha \;\, d\beta \;\, d\gamma$$

これを解いて

$$\mathbf{I} = \frac{1}{120}\left(\begin{matrix} 2\left(a_y{}^2 + b_y{}^2 + c_y{}^2 + a_y b_y + b_y c_y + c_y a_y + a_z{}^2 + b_z{}^2 + c_z{}^2 + a_z b_z + b_z c_z + c_z a_z\right) \\ -2\left(+a_x a_y + b_x b_y + c_x c_y\right) - \left(a_x b_y + a_y b_x + b_x c_y + b_y c_x + c_x a_y + c_y a_x\right) \\ -2\left(+a_x a_z + b_x b_z + c_x c_z\right) - \left(a_x b_z + a_z b_x + b_x c_z + b_z c_x + c_x a_z + c_z a_x\right) \end{matrix} \right.$$

$$\begin{matrix} -2\left(+a_x a_y + b_x b_y + c_x c_y\right) - \left(a_x b_y + a_y b_x + b_x c_y + b_y c_x + c_x a_y + c_y a_x\right) \\ 2\left(a_x{}^2 + b_x{}^2 + c_x{}^2 + a_x b_x + b_x c_x + c_x a_x + a_z{}^2 + b_z{}^2 + c_z{}^2 + a_z b_z + b_z c_z + c_z a_z\right) \\ -2\left(+a_y a_z + b_y b_z + c_y c_z\right) - \left(a_y b_z + a_z b_y + b_y c_z + b_z c_y + c_y a_z + c_z a_y\right) \end{matrix}$$

$$\left. \begin{matrix} -2\left(+a_x a_z + b_x b_z + c_x c_z\right) - \left(a_x b_z + a_z b_x + b_x c_z + b_z c_x + c_x a_z + c_z a_x\right) \\ -2\left(+a_y a_z + b_y b_z + c_y c_z\right) - \left(a_y b_z + a_z b_y + b_y c_z + b_z c_y + c_y a_z + c_z a_y\right) \\ 2\left(a_y{}^2 + b_y{}^2 + c_y{}^2 + a_y b_y + b_y c_y + c_y a_y + a_y{}^2 + b_y{}^2 + c_y{}^2 + a_y b_y + b_y c_y + c_y a_y\right) \end{matrix} \right) \cdot \left| \mathbf{a} \quad \mathbf{b} \quad \mathbf{c} \right|$$

簡潔に表現するために

$$\begin{matrix} k_x = a_x + b_x + c_x & k_{xx} = a_x{}^2 + b_x{}^2 + c_x{}^2 & k_{xy} = a_x a_y + b_x b_y + c_x c_y \\ k_y = a_y + b_y + c_y & k_{yy} = a_y{}^2 + b_y{}^2 + c_y{}^2 & k_{yz} = a_y a_z + b_y b_z + c_y c_z \\ k_z = a_z + b_z + c_z & k_{zz} = a_z{}^2 + b_z{}^2 + c_z{}^2 & k_{zx} = a_z a_x + b_z b_x + c_z c_x \end{matrix}$$

とおけば,

$$
\mathbf{I}=\begin{pmatrix} {k_y}^2-k_{yy}+{k_z}^2-k_{zz} & -\frac{1}{2}\left(k_xk_y+k_{xy}\right) & -\frac{1}{2}\left(k_xk_z+k_{xz}\right) \\ -\frac{1}{2}\left(k_xk_y+k_{xy}\right) & {k_x}^2-k_{xx}+{k_z}^2-k_{zz} & -\frac{1}{2}\left(k_yk_z+k_{yz}\right) \\ -\frac{1}{2}\left(k_xk_z+k_{xz}\right) & -\frac{1}{2}\left(k_yk_z+k_{yz}\right) & {k_x}^2-k_{xx}+{k_y}^2-k_{yy} \end{pmatrix}\cdot\sigma\cdot\begin{vmatrix}\mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c}\end{vmatrix}
$$

である．$\begin{vmatrix}\mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c}\end{vmatrix}$は体積の 6 倍であるので質量と慣性テンソルを同時に計算していくと効率が若干良くなる．

i 個目の三角錐の慣性テンソルを$\mathbf{I}_i$とすれば，トータルの慣性テンソルは

$$
\mathbf{I}=\sum_i \mathbf{I}_i
$$

となる．

B 主要形状の質量と慣性テンソル一覧

直方体	$xyz\sigma$	$\frac{M}{12}\cdot\begin{pmatrix} y^2+z^2 & 0 & 0 \\ 0 & z^2+x^2 & 0 \\ 0 & 0 & x^2+y^2 \end{pmatrix}$
球	$\frac{4}{3}\pi\cdot r^3\cdot\sigma$	$\frac{2}{5}Mr^2\cdot\mathbf{1}$
楕円体	$\frac{4}{3}\pi\cdot r_xr_yr_z\cdot\sigma$	$\frac{2}{5}M\cdot\begin{pmatrix} yz & 0 & 0 \\ 0 & zx & 0 \\ 0 & 0 & xy \end{pmatrix}$
円柱	$\pi r^2h\cdot\sigma$	$\frac{3}{20}M\cdot\begin{pmatrix} \frac{r^2+h^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{r^2+h^2}{4} \end{pmatrix}$