

## 2. 剛体の基礎理論

---

初めに本論文で大域的に使用する記号を定義する.

使用する記号

$t \in \mathbf{R}$	時間
$m \in \mathbf{R}$	質量
$\mathbf{x}, \mathbf{p} \in \mathbf{R}^3$	位置
$\mathbf{v} \in \mathbf{R}^3$	速度
$\mathbf{P} \in \mathbf{R}^3$	運動量
$\mathbf{I} \in \mathbf{R}^{3 \times 3}$	慣性テンソル
$\mathbf{I}_0 \in \mathbf{R}^{3 \times 3}$	対角化された慣性テンソル
$\mathbf{R} \in \mathbf{R}^{3 \times 3}$	姿勢
$\boldsymbol{\omega} \in \mathbf{R}^3$	角速度
$\mathbf{L} \in \mathbf{R}^3$	角運動量
$\mathbf{F}, \mathbf{f}, \mathbf{W} \in \mathbf{R}^3$	力
$\mathbf{J} \in \mathbf{R}^3$	撃力
$\boldsymbol{\tau} \in \mathbf{R}^3$	トルク

## 2.1. 質点の並進運動

質点は位置  $\mathbf{x}(t)$  と速度  $\mathbf{v}(t)$  という状態を持つ。但し、ここでは速度ではなく運動量  $\mathbf{P}(t) = m\mathbf{v}(t)$  を用いる。ニュートンの運動方程式,

$$\mathbf{F}(t) = m \frac{d^2 \mathbf{x}(t)}{dt^2} \quad (2.1.1)$$

$$\mathbf{F}(t) = \frac{d\mathbf{P}(t)}{dt} \quad (2.1.2)$$

より質点の運動は既に明らかであり、質点の状態ベクトル  $\mathbf{Y}$  とその微分は

$$\mathbf{Y}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{P}(t) \end{pmatrix} \quad (2.1.3)$$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{Y}(t) = \begin{pmatrix} m^{-1} \mathbf{P}(t) \\ \mathbf{F}(t) \end{pmatrix} \quad (2.1.4)$$

で定義する。

## 2.2. 剛体の姿勢とその変化

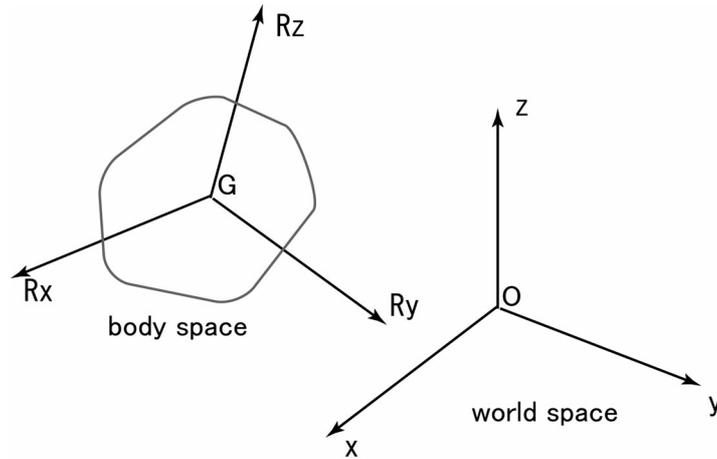


Figure 2-1

剛体は姿勢を持つ。これを剛体の物体座標系からワールド座標系への回転行列  $\mathbf{R}$  として表そう。  $\mathbf{R}_x$   $\mathbf{R}_y$   $\mathbf{R}_z$  をワールド座標系における物体座標の各軸方向の単位ベクトルとすると、

$$\mathbf{R} = (\mathbf{R}_x \quad \mathbf{R}_y \quad \mathbf{R}_z) \quad (2.2.1)$$

となる。

剛体の状態ベクトルの微分を定義するため、  $\mathbf{R}$  の時間微分について考えよう。角速度  $\boldsymbol{\omega}$  のとき、位置  $\mathbf{p}(t)$  の微分は  $\dot{\mathbf{p}}(t) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p}(t)$  である。同様に  $\mathbf{R}_x, \mathbf{R}_y, \mathbf{R}_z$  軸の単位ベクトルについても同様であるため、

$$\frac{d\mathbf{R}(t)}{dt} = (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}_x(t) \quad \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}_y(t) \quad \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}_z(t)) \quad (2.2.2)$$

が成り立つ。

表現を簡素化するため、  $\mathbf{v} = (a \quad b \quad c)^T$  のとき、  $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \mathbf{v}^* \mathbf{w}$  を満たす歪対称行列  $\mathbf{v}^*$  を利用する。

$$\mathbf{v}^* = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} \quad (2.2.3)$$

これを用いて、  $\frac{d\mathbf{R}(t)}{dt}$  を書き改めると、

$$\frac{d\mathbf{R}(t)}{dt} = (\boldsymbol{\omega}^* \mathbf{R}_x(t) \quad \boldsymbol{\omega}^* \mathbf{R}_y(t) \quad \boldsymbol{\omega}^* \mathbf{R}_z(t)) \quad (2.2.4)$$

故に、

$$\frac{d\mathbf{R}(t)}{dt} = \boldsymbol{\omega} * \mathbf{R}(t) \quad (2.2.5)$$

となる.

## 2.3. 角運動量

次に角速度  $\boldsymbol{\omega}$  の微分を考えるが、その前に角運動量について考えてみる. 剛体が質点の集合と考え各々の質点が  $\mathbf{r}_i$  の位置に質量  $m_i$  を持って存在するとき角運動量は,

$$\mathbf{L}(t) = \sum m_i \mathbf{r}_i(t) \times \frac{d\mathbf{r}_i(t)}{dt} \quad (2.3.1)$$

と定義される. これを微分すると,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{L}(t) &= \sum m_i \left( \frac{d\mathbf{r}_i(t)}{dt} \times \frac{d\mathbf{r}_i(t)}{dt} + \mathbf{r}_i(t) \times \frac{d^2\mathbf{r}_i(t)}{dt^2} \right) \\ &= \sum m_i \mathbf{r}_i(t) \times \frac{d^2\mathbf{r}_i(t)}{dt^2} \\ &= \sum \mathbf{r}_i(t) \times m_i \frac{d^2\mathbf{r}_i(t)}{dt^2} \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

ここで,  $m_i \frac{d^2\mathbf{r}_i}{dt^2} = \mathbf{F}_i$  を質点にかかる力を定義すれば,

$$\frac{d}{dt} \mathbf{L}(t) = \sum \mathbf{r}_i(t) \times \mathbf{F}_i(t) \quad (2.3.3)$$

となる. ここで,

$$\sum \mathbf{r}_i(t) \times \mathbf{F}_i(t) = \boldsymbol{\tau}(t) \quad (2.3.4)$$

として原点周りの外力の回転モーメント(トルク)を  $\boldsymbol{\tau}$  と定義する.

これより「角運動量の時間変化はトルクに等しい」事が導かれる.

$$\frac{d}{dt} \mathbf{L}(t) = \boldsymbol{\tau}(t) \quad (2.3.5)$$

## 2.4. 慣性テンソル

前節で角運動量の変化を求めた。よって角運動量と角速度の関係式を求める。(2.3.1)にお

いて  $\frac{d\mathbf{r}_i(t)}{dt} = \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{r}_i(t)$ ,  $\mathbf{r}_i(t) = (r_{ix} \ r_{iy} \ r_{iz})^T$  なので,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{L}(t) &= \sum m_i \mathbf{r}_i(t) \times (\boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{r}_i(t)) \\
 &= -\sum m_i \mathbf{r}_i(t) \times (\mathbf{r}_i(t) \times \boldsymbol{\omega}(t)) \\
 &= -\sum m_i \mathbf{r}_i(t) \cdot (\mathbf{r}_i(t) \cdot \boldsymbol{\omega}(t)) \\
 &= -\sum m_i \mathbf{r}_i(t) \cdot \mathbf{r}_i(t) \cdot \boldsymbol{\omega}(t) \\
 &= \sum m_i \begin{pmatrix} r_{iy}(t)^2 + r_{iz}(t)^2 & -r_{ix}(t)r_{iy}(t) & -r_{ix}(t)r_{iz}(t) \\ -r_{iy}(t)r_{ix}(t) & r_{iz}(t)^2 + r_{ix}(t)^2 & -r_{iy}(t)r_{iz}(t) \\ -r_{iz}(t)r_{ix}(t) & -r_{iz}(t)r_{iy}(t) & r_{ix}(t)^2 + r_{iy}(t)^2 \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{\omega}(t)
 \end{aligned} \tag{2.4.1}$$

このように角速度で表現することができる。さらに慣性テンソル<sup>2</sup> を

$$\mathbf{I}(t) = \sum m_i \begin{pmatrix} r_{iy}^2 + r_{iz}^2 & -r_{ix}r_{iy} & -r_{ix}r_{iz} \\ -r_{iy}r_{ix} & r_{iz}^2 + r_{ix}^2 & -r_{iy}r_{iz} \\ -r_{iz}r_{ix} & -r_{iz}r_{iy} & r_{ix}^2 + r_{iy}^2 \end{pmatrix} \tag{2.4.2}$$

で定義し、角運動量  $\mathbf{L}$  の定義は運動量  $\mathbf{P}$  の定義と似た形式で表せる。

$$\mathbf{L}(t) = \mathbf{I}(t) \cdot \boldsymbol{\omega}(t) \tag{2.4.3}$$

なお、慣性テンソルを積分形で書き直す。密度(単位体積あたりの質量) を  $\rho$  とすれば微小部分の持つ角加速度は

$$d\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \left( \rho dV \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) \tag{2.4.4}$$

よって慣性テンソルは

$$\mathbf{I}(t) = \iiint_V \begin{pmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -yx & z^2 + x^2 & -yz \\ -zx & -zy & x^2 + y^2 \end{pmatrix} \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz \tag{2.4.5}$$

<sup>2</sup>  $\mathbf{r}_i$  は暗黙に  $t$  の関数とする。

である<sup>3</sup>。

この慣性テンソルは姿勢の変化と共に  $\mathbf{r}_i$  が変化するため、その度(2.4.2)の再計算が必要になる。そこで姿勢を用いた式に書き改めて検討する。

$$\mathbf{r}_i^T \mathbf{r}_i = r_{ix}^2 + r_{iy}^2 + r_{iz}^2 \quad (2.4.6)$$

$$\mathbf{r}_i \mathbf{r}_i^T = \begin{pmatrix} r_{ix}^2 & r_{ix} r_{iy} & r_{ix} r_{iz} \\ r_{ix} r_{iy} & r_{iy}^2 & r_{iy} r_{iz} \\ r_{ix} r_{iz} & r_{iy} r_{iz} & r_{iz}^2 \end{pmatrix} \quad (2.4.7)$$

を利用して、完成テンソルは次式で表す事ができる。

$$\mathbf{I}(t) = \sum m_i (\mathbf{r}_i^T \mathbf{r}_i \mathbf{1} - \mathbf{r}_i \mathbf{r}_i^T) \quad (2.4.8)$$

ところで、 $\mathbf{r}_i$  は  $\mathbf{R}(t)$  の関数である。 $\mathbf{R}(0)$  のときの  $\mathbf{r}_i(0)$  を定数  $\mathbf{r}_{0i}$  とすると、

$$\begin{aligned} \mathbf{I}(t) &= \sum m_i [(\mathbf{R}(t)\mathbf{r}_{0i})^T (\mathbf{R}(t)\mathbf{r}_{0i}) \mathbf{1} - (\mathbf{R}(t)\mathbf{r}_{0i})(\mathbf{R}(t)\mathbf{r}_{0i})^T] \\ &= \sum m_i [\mathbf{r}_{0i}^T \mathbf{R}(t)^T \mathbf{R}(t) \mathbf{r}_{0i} \mathbf{1} - \mathbf{R}(t)\mathbf{r}_{0i} \mathbf{r}_{0i}^T \mathbf{R}(t)^T] \\ &= \sum m_i [\mathbf{r}_{0i}^T \mathbf{r}_{0i} \mathbf{1} - \mathbf{R}(t)\mathbf{r}_{0i} \mathbf{r}_{0i}^T \mathbf{R}(t)^T] \\ &= \sum m_i [\mathbf{R}(t)(\mathbf{r}_{0i}^T \mathbf{r}_{0i}) \mathbf{R}(t)^T - \mathbf{R}(t)\mathbf{r}_{0i} \mathbf{r}_{0i}^T \mathbf{R}(t)^T] \\ &= \mathbf{R}(t) \sum m_i [(\mathbf{r}_{0i}^T \mathbf{r}_{0i}) \mathbf{1} - \mathbf{r}_{0i} \mathbf{r}_{0i}^T] \mathbf{R}(t)^T \end{aligned} \quad (2.4.9)$$

ここで姿勢に依存しない定数を初期姿勢の慣性テンソルとして定義する。

$$\mathbf{I}_0 = \sum m_i [(\mathbf{r}_{0i}^T \mathbf{r}_{0i}) \mathbf{1} - \mathbf{r}_{0i} \mathbf{r}_{0i}^T] \quad (2.4.10)$$

すると任意の姿勢の慣性テンソルは、

$$\mathbf{I}(t) = \mathbf{R}(t) \mathbf{I}_0 \mathbf{R}(t)^T \quad (2.4.11)$$

で表現することができる。つまり  $\mathbf{I}_0$  を事前に求めておけば容易に任意の姿勢における慣性テンソルが求まる。慣性テンソルは対称行列であり任意の直行行列で対角化が可能である。即ち、正規直行行列で対角化できる。このことを主軸変換といい新しい座標系を慣性主軸と呼ぶ。

最終的に

$$\mathbf{I}_0 = \begin{pmatrix} I_{0x} & 0 & 0 \\ 0 & I_{0y} & 0 \\ 0 & 0 & I_{0z} \end{pmatrix} \quad (2.4.12)$$

を得る。

<sup>3</sup> 代表的な形状や多面体モデルの慣性テンソルの導出は付録に。

## 2.5. トルクによる角速度の計算

トルクから角速度の微分を求める。角運動量を微分すると、

$$\frac{d\mathbf{L}(t)}{dt} = \frac{d(\mathbf{I}(t)\boldsymbol{\omega}(t))}{dt} = \dot{\mathbf{I}}(t)\boldsymbol{\omega}(t) + \mathbf{I}(t)\dot{\boldsymbol{\omega}}(t) \quad (2.5.1)$$

になる。さらに $\mathbf{I}(t)$ と $\boldsymbol{\omega}(t)$ の微分は、

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{I}}(t) &= \dot{\mathbf{R}}(t)\mathbf{I}_0\mathbf{R}(t)^T + \mathbf{R}(t)\mathbf{I}_0\dot{\mathbf{R}}(t)^T \\ &= \boldsymbol{\omega}(t)^* \mathbf{R}(t)\mathbf{I}_0\mathbf{R}(t)^T + \mathbf{R}(t)\mathbf{I}_0(\boldsymbol{\omega}(t)^* \mathbf{R}(t))^T \\ &= \boldsymbol{\omega}(t)^* \mathbf{R}(t)\mathbf{I}_0\mathbf{R}(t)^T - \mathbf{R}(t)\mathbf{I}_0\mathbf{R}(t)^T \boldsymbol{\omega}(t)^* \end{aligned} \quad (2.5.2)$$

となる。これを(2.5.1)に代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{L}(t)}{dt} &= [\boldsymbol{\omega}(t)^* \mathbf{R}(t)\mathbf{I}_0\mathbf{R}(t)^T - \mathbf{R}(t)\mathbf{I}_0\mathbf{R}(t)^T \boldsymbol{\omega}(t)^*] \cdot \boldsymbol{\omega}(t) + \mathbf{R}(t)\mathbf{I}_0\mathbf{R}(t)^T \dot{\boldsymbol{\omega}}(t) \\ \boldsymbol{\tau}(t) &= [\boldsymbol{\omega}(t)^* \mathbf{R}(t)\mathbf{I}_0\mathbf{R}(t)^T - \mathbf{R}(t)\mathbf{I}_0\mathbf{R}(t)^T \boldsymbol{\omega}(t)^*] \cdot \boldsymbol{\omega}(t) + \mathbf{R}(t)\mathbf{I}_0\mathbf{R}(t)^T \dot{\boldsymbol{\omega}}(t) \\ \boldsymbol{\tau}(t) - [\boldsymbol{\omega}(t)^* \mathbf{R}(t)\mathbf{I}_0\mathbf{R}(t)^T - \mathbf{R}(t)\mathbf{I}_0\mathbf{R}(t)^T \boldsymbol{\omega}(t)^*] \cdot \boldsymbol{\omega}(t) &= \mathbf{R}(t)\mathbf{I}_0\mathbf{R}(t)^T \dot{\boldsymbol{\omega}}(t) \end{aligned} \quad (2.5.3)$$

系全体を $\mathbf{R}(t)^{-1}$ 回転させると、 $\mathbf{R}(t)^T = \mathbf{R}(t)^{-1}$ であることから、

$$\mathbf{I}_0\mathbf{R}(t)^{-1}\dot{\boldsymbol{\omega}}(t) = \mathbf{R}(t)^{-1}\boldsymbol{\tau}(t) - [\mathbf{R}(t)^{-1}\boldsymbol{\omega}(t)^* \mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_0\mathbf{R}(t)^{-1}\boldsymbol{\omega}(t)^*] \cdot \mathbf{R}(t)^{-1}\boldsymbol{\omega}(t) \quad (2.5.4)$$

$\boldsymbol{\omega}(t)$ と $\boldsymbol{\tau}(t)$ を物体座標系として置換すれば、

$$\mathbf{I}_0\dot{\boldsymbol{\omega}}(t) = \boldsymbol{\tau}(t) - [\boldsymbol{\omega}(t)^* \mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_0\boldsymbol{\omega}(t)^*] \cdot \boldsymbol{\omega}(t) \quad (2.5.5)$$

となり、展開するとオイラーの運動方程式が求まる。

$$\begin{pmatrix} I_{0x}\dot{\omega}_x(t) \\ I_{0y}\dot{\omega}_y(t) \\ I_{0z}\dot{\omega}_z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_x(t) \\ \tau_y(t) \\ \tau_z(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (I_{0y} - I_{0z})\omega_y(t)\omega_z(t) \\ (I_{0z} - I_{0x})\omega_y(t)\omega_z(t) \\ (I_{0x} - I_{0y})\omega_y(t)\omega_z(t) \end{pmatrix} \quad (2.5.6)$$

以上より、角加速度を求める方法は「オイラーの運動方程式」と(2.4.3)式に依る方法がある。前者はトルクを物体の座標系で表現する必要があるが計算量は少ない。後者は

$\frac{d\mathbf{L}(t)}{dt} = \boldsymbol{\tau}(t)$ ,  $\boldsymbol{\omega}(t) = \mathbf{I}(t)^{-1}\mathbf{L}(t)$ と計算するため予め $\mathbf{I}(t)^{-1}$ を必要とする。ここでは後に衝

突時の撃力などで $\mathbf{I}(t)^{-1}$ が必要となるため後者を用いることにする。

## 2.6. 剛体の状態ベクトル

以上の理論を踏まえ、剛体の状態ベクトル  $\mathbf{Y}$  を定義する。この式に外力  $\mathbf{F}(t)$  とそれが作用する位置より求まるトルク  $\boldsymbol{\tau}(t)$  を与えれば剛体の振る舞いは次の状態方程式で決定される。

$$\mathbf{Y}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{R}(t) \\ \mathbf{P}(t) \\ \mathbf{L}(t) \end{pmatrix} \quad \frac{d}{dt} \mathbf{Y}(t) = \begin{pmatrix} m^{-1} \mathbf{P}(t) \\ \boldsymbol{\omega}(t)^* \mathbf{R}(t) \\ \mathbf{F}(t) \\ \boldsymbol{\tau}(t) \end{pmatrix} \quad (2.6.1)$$

## 2.7. quaternion

これまでで導いた式で繰り返し数値計算をすると、誤差が蓄積され姿勢を管理する回転行列  $\mathbf{R}(t)$  が正規直行行列でなくなり、物体が破綻する<sup>4</sup>。これを防ぐためには、強制的に  $\mathbf{R}(t)$  を正規直行化を定期的にする必要がある。

しかし、quaternion を用いると、より容易に姿勢を扱うことができる。

### 1. quaternion とは

quaternion は様々な側面を持っているが、定義は、

$$\mathbf{q} = s + v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k} \quad (2.7.1)$$

である。ここで、 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  に以下の性質が定義される。

$$\begin{aligned} \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} &= -1 & \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} &= -\mathbf{j} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{k} \\ \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} &= -1 & \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} &= -\mathbf{k} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{i} \\ \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} &= -1 & \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} &= -\mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{j} \end{aligned} \quad (2.7.2)$$

quaternion は complex<sup>5</sup>の拡張であるため、似た性質を持つ。事実  $\mathbf{j}$  と  $\mathbf{k}$  の係数が 0 であれば complex と等しい。この表記は冗長なので、 $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^3$  を定義し、

$$\mathbf{q} = s + v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k} = [s, \mathbf{v}] \quad (2.7.3)$$

と表記できることにしよう。

### 2. 四則演算

定義に従って quaternion の四則演算を導く。

---

<sup>4</sup> 具体的には物体に歪みが生じる

<sup>5</sup> 複素数

$$\begin{aligned}\mathbf{q}_1 &= [s_1, \mathbf{v}_1] \\ \mathbf{q}_2 &= [s_2, \mathbf{v}_2]\end{aligned}\tag{2.7.4}$$

とすると

$$\begin{aligned}\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 &= (s_1 + v_{1x}\mathbf{i} + v_{1y}\mathbf{j} + v_{1z}\mathbf{k}) + (s_2 + v_{2x}\mathbf{i} + v_{2y}\mathbf{j} + v_{2z}\mathbf{k}) = [s_1 + s_2, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2] \\ \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2 &= (s_1 + v_{1x}\mathbf{i} + v_{1y}\mathbf{j} + v_{1z}\mathbf{k}) - (s_2 + v_{2x}\mathbf{i} + v_{2y}\mathbf{j} + v_{2z}\mathbf{k}) = [s_1 - s_2, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2]\end{aligned}\tag{2.7.5}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2 &= (s_1 + v_{1x}\mathbf{i} + v_{1y}\mathbf{j} + v_{1z}\mathbf{k}) \cdot (s_2 + v_{2x}\mathbf{i} + v_{2y}\mathbf{j} + v_{2z}\mathbf{k}) \\ &= s_1s_2 + s_1v_{2x}\mathbf{i} + s_1v_{2y}\mathbf{j} + s_1v_{2z}\mathbf{k} + v_{1x}s_2\mathbf{i} + v_{1x}iv_{2x}\mathbf{i} + v_{1x}iv_{2y}\mathbf{j} + v_{1x}iv_{2z}\mathbf{k} \\ &\quad + v_{1y}\mathbf{j}s_2 + v_{1y}\mathbf{j}v_{2x}\mathbf{i} + v_{1y}\mathbf{j}v_{2y}\mathbf{j} + v_{1y}\mathbf{j}v_{2z}\mathbf{k} + v_{1z}\mathbf{k}s_2 + v_{1z}\mathbf{k}v_{2x}\mathbf{i} + v_{1z}\mathbf{k}v_{2y}\mathbf{j} + v_{1z}\mathbf{k}v_{2z}\mathbf{k} \\ &= s_1s_2 + s_1v_{2x}\mathbf{i} + s_1v_{2y}\mathbf{j} + s_1v_{2z}\mathbf{k} + v_{1x}s_2\mathbf{i} - v_{1x}v_{2x} + v_{1x}v_{2y}\mathbf{k} - v_{1x}v_{2z}\mathbf{j} \\ &\quad + v_{1y}s_2\mathbf{j} - v_{1y}v_{2x}\mathbf{k} - v_{1y}v_{2y} + v_{1y}v_{2z}\mathbf{i} + v_{1z}s_2\mathbf{k} + v_{1z}v_{2x}\mathbf{j} - v_{1z}v_{2y}\mathbf{i} - v_{1z}v_{2z} \\ &= (s_1s_2 - v_{1x}v_{2x} - v_{1y}v_{2y} - v_{1z}v_{2z}) + (s_1v_{2x} + v_{1x}s_2 + v_{1y}v_{2z} - v_{1z}v_{2y}) \cdot \mathbf{i} \\ &\quad + (s_1v_{2y} - v_{1x}v_{2z} + v_{1y}s_2 + v_{1z}v_{2x}) \cdot \mathbf{j} + (s_1v_{2z} + v_{1x}v_{2y} - v_{1y}v_{2x} + v_{1z}s_2) \cdot \mathbf{k} \\ &= [s_1s_2 - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2, s_1\mathbf{v}_2 + s_2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2]\end{aligned}\tag{2.7.6}$$

である。

除算は inverse quaternion  $\mathbf{q}^{-1}$  を乗ずることにより行う。  $\mathbf{q}^{-1}$  は以下の性質を持つ。

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{q}^{-1} = 1\tag{2.7.7}$$

$\mathbf{q}^{-1}$  を考える前に、ある計算を試みる。

$$\begin{aligned}[s, \mathbf{v}] \cdot [s, -\mathbf{v}] &= [s^2 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}, -s\mathbf{v} + s\mathbf{v} + \mathbf{v} \times (-\mathbf{v})] \\ &= s^2 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}\end{aligned}\tag{2.7.8}$$

ここで、 $[s, -\mathbf{v}]$  は  $[s, \mathbf{v}]$  の conjugate quaternion と呼ばれるものであり、 $\bar{\mathbf{q}}$  と表記される。この式の両辺を  $s^2 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$  で割ると、

$$[s, \mathbf{v}] \cdot [s, -\mathbf{v}] / (s^2 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = 1\tag{2.7.9}$$

になる。これより、

$$\mathbf{q}^{-1} = [s, -\mathbf{v}] / (s^2 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v})\tag{2.7.10}$$

であることがわかる。さらに、

$$|\mathbf{q}| = s^2 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}\tag{2.7.11}$$

と  $\mathbf{q}$  の norm を定義すれば、

$$\mathbf{q}^{-1} = \bar{\mathbf{q}} / |\mathbf{q}|\tag{2.7.12}$$

である。なお、絶対値  $\|\mathbf{q}\|$  は、

$$\|\mathbf{q}\| = \sqrt{s^2 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}\tag{2.7.13}$$

であり、絶対値 1 の quaternion を正規 quaternion と呼ぶ。

### 3. 軸周りの回転

絶対値が 1 の単位ベクトル  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  とそれによる quaternion  $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2$  を定義し, それを用いた quaternion を作る.

$$\begin{aligned}\mathbf{q} &= \mathbf{V}_2 \cdot \bar{\mathbf{V}}_1 \\ &= [0, \mathbf{e}_2] \cdot [0, -\mathbf{e}_1] \\ &= [\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2]\end{aligned}\tag{2.7.14}$$

ここで,  $\mathbf{v}_{axis}$  を  $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$  の単位ベクトルとし  $\mathbf{e}_1$  と  $\mathbf{e}_2$  の間の角が  $\mathcal{G}$  であれば,

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 &= |\mathbf{e}_1| \cdot |\mathbf{e}_2| \cdot \cos \mathcal{G} \\ \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 &= |\mathbf{e}_1| \cdot |\mathbf{e}_2| \cdot \sin \mathcal{G} \cdot \mathbf{v}_{axis}\end{aligned}\tag{2.7.15}$$

が成り立ち, 絶対値 1 より,

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 &= \cos \mathcal{G} \\ \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 &= \sin \mathcal{G} \cdot \mathbf{v}_{axis}\end{aligned}\tag{2.7.16}$$

よって,

$$\mathbf{q} = [\cos \mathcal{G}, \sin \mathcal{G} \cdot \mathbf{v}_{axis}]\tag{2.7.17}$$

である.

さて, これを用いて次の式を検討してみよう.

$$\begin{aligned}(\mathbf{q}\mathbf{V}_1\bar{\mathbf{q}})\bar{\mathbf{V}}_2 &= ((\mathbf{v}_2\bar{\mathbf{V}}_1)\mathbf{V}_1(\mathbf{v}_1\bar{\mathbf{V}}_2))\bar{\mathbf{V}}_2 \\ &= (\mathbf{v}_2\bar{\mathbf{V}}_1)(\mathbf{V}_1\mathbf{V}_1)(\bar{\mathbf{V}}_2\bar{\mathbf{V}}_2) \\ &= \mathbf{v}_2\bar{\mathbf{V}}_1(-1)(-1) \\ &= \mathbf{v}_2\bar{\mathbf{V}}_1\end{aligned}\tag{2.7.18}$$

$\mathbf{V}_2$  と  $\bar{\mathbf{V}}_1$  は  $\mathbf{v}_{axis}$  周りに  $\mathcal{G}$  回転させた関係を持つ事が分かっている. 同様に今の計算より,

$\mathbf{q}\mathbf{V}_1\bar{\mathbf{q}}$  と  $\bar{\mathbf{V}}_2$  が同様の関係を持つことが明らかになった. つまり,  $\mathbf{V}_1$  から  $\mathbf{q}\mathbf{V}_1\bar{\mathbf{q}}$  へ  $\mathbf{v}_{axis}$  周りに  $2\mathcal{G}$  回転していることになる. この意味するところは,

$$\text{Rot}(\mathbf{q}, \mathbf{v}) = \mathbf{q} \cdot \mathbf{v} \cdot \mathbf{q}^{-1}\tag{2.7.19}$$

は  $\mathbf{v}$  を  $\mathbf{v}_{axis}$  周りに  $2\mathcal{G}$  回転させることを示す.

結論として,  $\mathbf{v}_{axis}$  周りに  $\varphi$  回転させる関数は,

$$\mathbf{q} = [\cos(\varphi/2), \sin(\varphi/2) \cdot \mathbf{v}_{axis}]\tag{2.7.20}$$

とした時,

$$\text{Rot}(\mathbf{q}, \mathbf{v}) = \mathbf{q} \cdot \mathbf{v} \cdot \mathbf{q}^{-1}\tag{2.7.21}$$

である。

任意軸の回転は姿勢を表すことができる。これで **quaternion** が回転行列の代わりとして扱えることが分かった。行列と同様に **quaternion** 同士の乗算で親子関係を構築することも出来る。

## 4. 行列化

**quaternion** で剛体の姿勢が表せることが分かったが、平行移動が表現できないので結局  $4 \times 4$  行列が必要となる。このため、姿勢を **quaternion** で管理しつつ最終的な変換は行列で行うというのが最善な手段となると考えた。そこで、**quaternion** の行列化を考える。

行列化は、即ち(2.7.2)の **quaternion** の定義を満たす行列を作ることに他ならない。**quaternion** の成分を

$$\langle s, v_x, v_y, v_z \rangle$$

と表記し、定義どおりの計算をしてる。例えば、 $\mathbf{i} \mathbf{i} = -1$  なら、

$$\langle 0, 1, 0, 0 \rangle \cdot \mathbf{i} = \langle -1, 0, 0, 0 \rangle$$

である。

$\mathbf{i}$  についての全ての定義を列挙しよう。

$$\langle 1, 0, 0, 0 \rangle \cdot \mathbf{i} = \langle 0, 1, 0, 0 \rangle$$

$$\langle 0, 1, 0, 0 \rangle \cdot \mathbf{i} = \langle -1, 0, 0, 0 \rangle$$

$$\langle 0, 0, 1, 0 \rangle \cdot \mathbf{i} = \langle 0, 0, 0, -1 \rangle$$

$$\langle 0, 0, 0, 1 \rangle \cdot \mathbf{i} = \langle 0, 0, 1, 0 \rangle$$

これを  $\mathbf{i}$  が  $4 \times 4$  行列であるとしベクトル演算の結果だと考えるなら、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{i} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.7.22)$$

と表記できる。これは、

$$\mathbf{i} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.7.23)$$

であることを示す<sup>6</sup>。同様に  $\mathbf{j}, \mathbf{k}$  の行列も求めると

---

<sup>6</sup> このあたりの流れが何故これで正しい結果を導くのかは、現在調査中。

$$\mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.7.24)$$

以上より,

$$\mathbf{q} = s + v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k} = \begin{pmatrix} s & v_x & v_y & v_z \\ -v_x & s & -v_z & v_y \\ -v_y & v_z & s & -v_x \\ -v_z & -v_y & v_x & s \end{pmatrix} \quad (2.7.25)$$

である。さて、問題なのは **quaternion** を同次変換行列として扱うときの回転行列である。つまり  $Rot(\mathbf{q}, \mathbf{v}) = \mathbf{q} \cdot \mathbf{v} \cdot \mathbf{q}^{-1}$  の行列を求めればよい。

これを展開し、 $\mathbf{v}$  について解くと、

$$Rot(\mathbf{q}, \mathbf{v}) = \begin{pmatrix} s & v_x & v_y & v_z \\ -v_x & s & -v_z & v_y \\ -v_y & v_z & s & -v_x \\ -v_z & -v_y & v_x & s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & x & y & z \\ -x & 0 & -z & y \\ -y & z & 0 & -x \\ -z & -y & x & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s & v_x & v_y & v_z \\ -v_x & s & -v_z & v_y \\ -v_y & v_z & s & -v_x \\ -v_z & -v_y & v_x & s \end{pmatrix}^{-1}$$

$$Rot(\mathbf{q}, \mathbf{v}) = \begin{pmatrix} s^2 + v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s^2 + v_x^2 - v_y^2 - v_z^2 & 2v_x v_y - 2sv_z & 2v_x v_z + 2sv_y \\ 0 & 2v_x v_y + 2sv_z & s^2 - v_x^2 + v_y^2 - v_z^2 & 2v_y v_z - 2sv_x \\ 0 & 2v_x v_z - 2sv_y & 2v_y v_z + 2sv_x & s^2 - v_x^2 - v_y^2 + v_z^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (2.7.26)$$

姿勢を表現する場合は **quaternion** は正規化されているので、 $s^2 + v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = 1$  である。また、他の行列との整合性を取るため<sup>7</sup>、左上に回転行列を持つてくると、

$$Rot(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} 1 - 2v_y^2 - 2v_z^2 & 2v_x v_y - 2sv_z & 2v_x v_z + 2sv_y & 0 \\ 2v_x v_y + 2sv_z & 1 - 2v_x^2 - 2v_z^2 & 2v_y v_z - 2sv_x & 0 \\ 2v_x v_z - 2sv_y & 2v_y v_z + 2sv_x & 1 - 2v_x^2 - 2v_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.7.27)$$

になる。

<sup>7</sup>  $\langle v_x, v_y, v_z, s \rangle$  と定義すれば直接(2.7.27)が求まる。